数理解析研究所講究録
351巻 1979年 22-24

On the confluence of regular and irregular singularities

九大 理　　吉田正章

§0 序　以下の微分方程式を考えよう。

$$(0.1) \qquad x^{2(m+2)}y'' + x^{m+2}q(x)y' + p(x)y = 0$$

ここで，$q(x)$ 及び $p(x)$ は $x=0$ で正則とする．$x=0$ での特性方程式は相異る根をもつと仮定する．それぞれの根に対応する最後の特性指数を λ, λ' とする．

方程式 (0.1) は以下の2つの方程式の極限と考えられる．

$$(0.2) \qquad \prod_{j=0}^{m+1}(x-\varepsilon_j)^2 y'' + \prod_{j=0}^{m+1}(x-\varepsilon_j)q(x)y' + p(x)y = 0,$$

$$(0.3) \qquad (x-\varepsilon_0)^{2(\nu+1)}(x-\varepsilon_1)^{2(m-\nu+1)}y'' + (x-\varepsilon_0)^{\nu+1}(x-\varepsilon_1)^{m-\nu+1}q(x)y' + p(x)y = 0.$$

方程式 (0.2) は $x=\varepsilon_j$ $(j=0,1,\cdots,m+1)$ で確定特異点をもつ．そこでの決定方程式の根を ρ_j, ρ_j' とする．一方 (0.3) は，$x=\varepsilon_k$ $(k=0,1)$ に確定あるいは不確定特異点をもつ．もし不確定ならそこでの特性方程式は相異る根をもつと仮定する．そこでの最后の特性指数を（確定なら決定方程式の根）λ_k, λ_k' とする．

我々は，ρ_j, ρ_j'；λ_k, λ_k' と，λ, λ' との間に成り立つ関係を調べたい．方程式 (0.2) において，

$$\varepsilon_j = \zeta^j a, \qquad \zeta = \exp\frac{2\pi i}{m+1}$$

ならば，(0.2) の決定方程式の"和"は (0.1) の最高の特性指数の"和"に収束する，即ち

$$\lim_{a\to 0}\sum_{j=0}^{m+1}(\rho_j+\rho_j') = \lambda+\lambda'$$

なることは，Fuchs－福原 の関係式として知られている．

このノートでは，"和"の代に"差"を問題とする．

§1. 結果

方程式 (0.3) の2つの特異点の合流に関して，<u>定理 1</u>

$$\lim_{\substack{\varepsilon_0\to 0\\ \varepsilon_1\to 0}} \frac{\{(\lambda_0-\lambda_0')^2-(\lambda_1-\lambda_1')^2\}^2}{2\{(\lambda_0-\lambda_0')^2+(\lambda_1-\lambda_1')^2\}} = (\lambda-\lambda')^2.$$

次に，(0.2) の $m+2$ 個の確定特異点の合流を考えよう．順々に2つづつ合流して最終的に，階数が $m+1$ の不確定特異点をただ1つもつ (0.1) に達する．合流する仕方はいろいろあるが，各段階で定理1を適用すると，その仕方に応じて，$(\rho_j-\rho_j')^2$ と $(\lambda-\lambda')^2$ との間の関係を得る．例えば，

<u>定理 2</u>　　$y_j := (\rho_j-\rho_j')^2$,

$$y_{0,1,\cdots,l} := \lim_{\varepsilon_l\to 0}\frac{(y_{0,1,\cdots,l-1}-y_l^{(0,1,\cdots,l-1)})^2}{2(y_{0,1,\cdots,l-1}+y_l^{(0,1,\cdots,l-1)})},$$

$$y_l^{(0,1,\cdots,l-1)} := \lim_{\varepsilon_0,\cdots\varepsilon_{l-1}\to 0} y_l$$

とおくと

$$y_{0,1,\cdots,m+1} = (\lambda-\lambda')^2.$$

とくに，$m=0,1$ のときは，定理2における lim を1つに出来る．

<u>定理 3</u>　$\Delta_\nu := \sum_{0\le j_1<\cdots<j_\nu\le m+1} y_{j_1}\cdots y_{j_\nu}$ とおくと，

$m=0$ のときは，$\displaystyle\lim_{\varepsilon_0,\varepsilon_1\to 0} \frac{\Delta_1^2-4\Delta_2}{2\Delta_1} = (\lambda-\lambda')^2$

$m=1$ のときは，$\displaystyle\lim_{\varepsilon_0,\varepsilon_1,\varepsilon_2\to 0} \frac{(\Delta_1^2-4\Delta_2)^2}{4^3\,\Delta_3} = (\lambda-\lambda')^2$.

§2　<u>定理の証明</u>　計算のみ故略．

References

[1] Hukuhara : Sur la relation de Fuchs relative à l'équation diff. linéaire. Proc. Jap. Ac. Vol. 34 (1958) 102 - 106.

[2] M. Yoshida : On the confluence of regular and irregular singularities (to appear).